$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = a_i \hat{e}_i \pm b_i \hat{e}_i = \left(a_i \pm b_i\right)\hat{e}_i = c_i \hat{e}_i \;\; \Rightarrow a_i \pm b_i = c_i$$

ضرب بردارها:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = scalar & dot\ product \\ \vec{a} \times \vec{b} = vector & cross\ product \\ \vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{b} = tensor & dyadic\ product \end{cases}$$

<u>Dot product</u>:

symbolic $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \& \quad \cos\left(\hat{e}_i,\hat{e}_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

indicial $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_i\hat{e}_i\right)\cdot\left(b_j\hat{e}_j\right) = a_ib_j\left(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\right)$

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \cos\left(\hat{e}_i,\hat{e}_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

Kronecker delta $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$ Identity tensor $\tilde{\mathrm{I}} = \left[\delta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تانسور همانی (یکّه)

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij} \quad \& \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \delta_{ij}a_ib_j = a_ib_i$$

اگر دلتای کرانیکر $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ روی جمله‌ای اثر کند، اندیس مشابه را حذف و اندیس نامشابه را جایگزین می‌کند.

$\delta_{im}a_m = a_i$ $\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}$ $\delta_{ij}T_{ij} = T_{ii}$

<u>Cross product</u>:

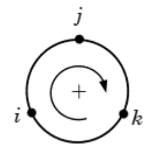
symbolic $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)\hat{e} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \& \quad \hat{e}\perp\vec{a},\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\hat{e}_1 + \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\hat{e}_2 + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\hat{e}_3 \quad \& \quad \sin\left(\hat{e}_i,\hat{e}_j\right) = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

indicial $\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_i\hat{e}_i\right)\times\left(b_j\hat{e}_j\right) = a_ib_j\left(\hat{e}_i\times\hat{e}_j\right)$

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j = \sin\left(\hat{e}_i,\hat{e}_j\right)\hat{e} \quad \& \quad \hat{e}\perp\hat{e}_i,\hat{e}_j$$

$$\text{Permutation symbol } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{جایگزینی مثبت} \\ 0 & \text{اندیس تکراری} \\ -1 & \text{جایگزینی منفی} \end{cases}$$



$\overrightarrow{12312}$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad \& \quad \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k$$

نماد جایگشت $\varepsilon_{ijk} \neq \varepsilon_{jik}$ نشانگر تانسور مرتبه‌ی سه با ۲۷ وضعیت است.

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \quad , \quad \varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}$$

<u>Triple product</u>:

Scalar triple product:

$$\text{symbolic } \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \left(b_2 c_3 - b_3 c_2 \right) + a_2 \left(b_3 c_1 - b_1 c_3 \right) + a_3 \left(b_1 c_2 - b_2 c_1 \right)$$

$$\text{indicial} \quad \begin{aligned} &\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(a_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(b_j \hat{e}_j \times c_k \hat{e}_k \right) = a_i b_j c_k \hat{e}_i \cdot \left(\hat{e}_j \times \hat{e}_k \right) \\ &= a_i b_j c_k \hat{e}_i \cdot \left(\varepsilon_{jkm} \hat{e}_m \right) = a_i b_j c_k \varepsilon_{jkm} \left(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_m \right) = a_i b_j c_k \varepsilon_{jkm} \left(\delta_{im} \right) = a_i b_j c_k \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \end{aligned}$$

$$\hat{e}_i \cdot \left(\hat{e}_j \times \hat{e}_k \right) = \varepsilon_{ijk} \quad \& \quad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Vector triple product:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c}$$

تمرین: با استفاده از رابطه‌ی ضرب سه‌گانه‌ی برداری، رابطه‌ی زیر را اثبات کنید.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_i\hat{e}_i\right)\times\left(b_j\hat{e}_j\times c_k\hat{e}_k\right)=a_ib_jc_k\hat{e}_i\times\left(\hat{e}_j\times\hat{e}_k\right)=a_ib_jc_k\left(\delta_{ik}\hat{e}_j-\delta_{ij}\hat{e}_k\right)$$
$$=a_ib_jc_i\hat{e}_j-a_ib_ic_k\hat{e}_k=a_ib_jc_i\hat{e}_j-a_ib_ic_j\hat{e}_j$$

$$\hat{e}_i\times\left(\hat{e}_j\times\hat{e}_k\right)=\delta_{ik}\hat{e}_j-\delta_{ij}\hat{e}_k \quad \& \quad \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=a_i\left(b_jc_i-b_ic_j\right)\hat{e}_j$$

مثال: مطلوبست حاصل عبارت‌های زیر:

1) $\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$

2) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{iik}=0$

3) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{ii} & \delta_{ij}\\ \delta_{ji} & \delta_{jj}\end{vmatrix}=\delta_{ii}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{ji}=\delta_{ii}\delta_{jj}-\delta_{ii}=\delta_{ii}\left(\delta_{jj}-1\right)=3(2)=6$

4) $\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}=?$

تمرین: با توجه به a_{ij} و x_i حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \left(x_i\right)=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$$

1. $a_{ij}^2x_j$ 2. $a_{ij}x_j^2$ 3. $a_{ij}^2x_i$ 4. $a_{ij}x_i^2$

5. $a_{ij}x_ix_j$ 6. $\varepsilon_{ijk}a_{ij}x_k$ 7. $\varepsilon_{ijk}a_{jk}x_i$ 8. $\varepsilon_{ijk}x_ix_jx_k$